# DISCIPOLII LUI PITAGORA

**Concurs regional, aprobat de ISJ GORJ**
**cu avizul MEN**

**Ordin de ministru nr. 3016/2/09.01.2019**
**C.A.E.R.I. 2019, pozitia 1186**

**Iniţiatori:**

1. Şcoala Gimnazială Sf. Nicolae, Tg-Jiu
**Prof. GIORGI VICTORIA**

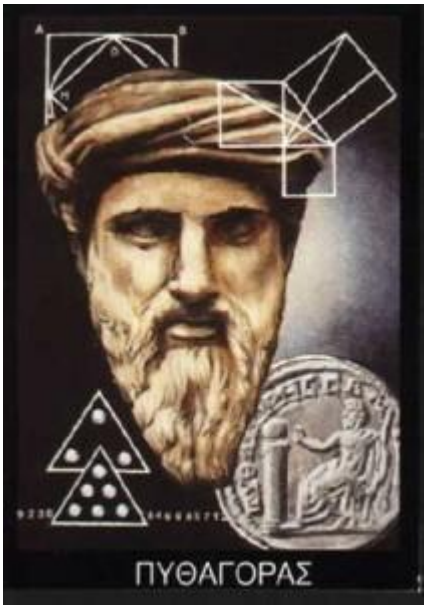
2. Şcoala Gimnazială nr. 2, Lupeni
**Prof. VELCEA EMILIA**

**Coordonatori:**

Prof. GIORGI VICTORIA
**Şcoala Gimnazială Sf. Nicolae, Tg-Jiu. Gorj**

Prof. VELCEA EMILIA
**Şcoala Gimnazială nr.2, Lupeni, Hunedoara**

Prof. BONDOC GABRIELA
**Colegiul National Pedagogic „Stefan Odobleja", Drobeta Turnu Severin, Mehedinti**




# LEGENDA PAHARULUI LUI PITAGORA

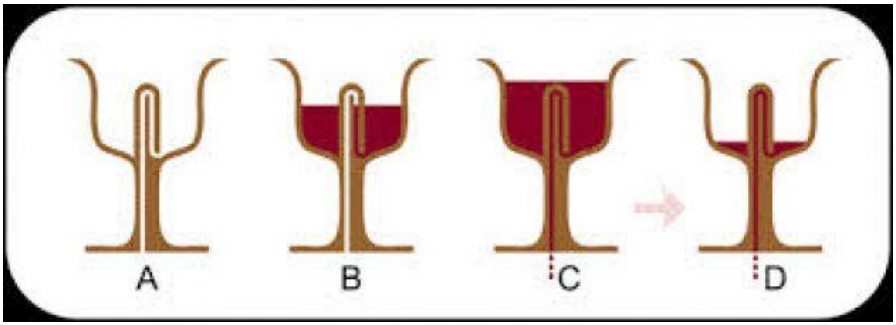
Celebrul filosof şi matematician grec Pitagora, care a trăit în perioada 580-495 înainte de Hristos, a rămas cunoscut lumii nu numai pentru contribuţiile aduse matematicii, cu celebrele sale tabla înmulţirii şi teorema care-i poartă numele, ci şi prin combinarea matematicii cu misticismul.

Pitagora a fost însă şi un propovăduitor al echităţii, iar una dintre invenţiile sale ne arată de ce oamenii trebuie să fie cumpăraţi. Este vorba despre "Paharul lui Pitagora", sau cum îi mai spun grecii, „Cupa echităţii”, inventată de marele filosof pentru a răspunde unei nevoi reale de moment. Se spune că această cupă a fost inventată de Pitagora în timpul lucrărilor de alimentare cu apă a insulei greceşti Samos, aproximativ în jurul anului 530 î.Hr., cu scopul de a fi

împărţit în mod egal vinul pentru muncitorii constructori ai acelor vremuri. Pe atunci se obişnuia ca muncitorii să fie stimulaţi cu licoarea lui „Bachus” pentru a-şi îndeplini sarcinile. Cum foarte mulţi dintre ei erau lacomi şi necivilizaţi, se întreceau cu măsura şi beau mai mult decât alţi muncitori cumpătaţi la pahar.

Prin urmare, rezultatul nu putea să fie decât unul dezastruos, în sensul că „însetaţii” făceau pagubă şi aveau nevoie de mai mult timp pentru a se trezi din „euforie”, fiind deci o piatră de moară pentru ceilalţi, care munceau mai mult. Atunci Pitagora a inventat celebra sa cupă, prin care vinul era distribuit egal pentru toată lumea. El a marcat pe interior nivelul maxim până la care se poate umple cupa. Partea deosebită a invenţiei sale este că această cupă are în interiorul său o coloană cu un orificiu în partea inferioară, iar lichidul din pahar nu curge dacă este umplut până la nivelul marcat. Dacă se toarnă chiar şi cu o picătură în plus peste limita marcată, atunci surpriza este totală: tot lichidul se scurge din cupă.

Metoda este folosită în fizică şi se numeşte principiul vaselor comunicante.




Toată această poveste vine să demonstreze faptul că doar şi o singură picătură în plus poate strica echilibrul vieţii, lucru demonstrat cu vârf şi îndesat.

# ASPECTE METODICE LEGATE DE UNELE PROBLEME DE CONCURS

***Prof. Marina Constantinescu***,
Școala Gimnazială "Constantin Săvoiu", Tg-Jiu
***Prof. Mircea Constantinescu***,
Colegiul Național "Ecaterina Teodoroiu", Tg-Jiu

La etapa județeană a olimpiadei de matematică din martie 2015, la Clasa a VII-a a fost propusă următoarea problemă:

**Problema 1**. În triunghiul $ABC$, fie $M$ mijlocul laturii $[AC]$ și punctul $N \in (AM)$. Paralela prin $N$ la $AB$ intersectează dreapta $BM$ în $P$, paralela prin $M$ la $BC$ intersectează dreapta $BN$ în $Q$, iar paralela prin $N$ la $AQ$ intersectează dreapta $BC$ în $S$. Demonstrați că dreptele $PS$ și $AC$ sunt paralele (Cosmin Manea și Dragoș Petrică, Pitești).

Așa cum s-a observat și din soluțiile mai multor elevi, ipoteza ca punctul $M$ să fie mijlocul laturii $[AC]$ este superfluă. Vom prezenta în continuare o soluție a Problemei 1, în absența acestei condiții.

**Observația 1.** Concluzia Problemei 1 rămâne valabilă pentru orice punct $M \in (AC)$.

*Soluție.* Fie $NS \cap QM = \{I\}$. Din $IQ \; II \; BS$ rezultă că $\frac{QI}{BS} = \frac{NI}{NS}$ și, analog $\frac{IM}{SC} = \frac{NI}{NS}$. Așadar $\frac{QI}{IM} = \frac{BS}{SC}$ (1)

Din $IN \; II \; AQ$ obținem $\frac{QI}{IM} = \frac{AN}{NM}$, iar paralelismul dreptelor $NP$ și $AB$ implică $\frac{AN}{NM} = \frac{BP}{PM}$. Așadar $\frac{QI}{IM} = \frac{BP}{PM}$ (2)

Relațiile $(1)$ și $(2)$ conduc la $\frac{BS}{SC}=\frac{BP}{PM}$, de unde *PS II AC*.

În continuare vom prezenta condiții necesare și suficiente ca punctul $M$ să fie mijlocul lui $[AC]$. Mai exact avem:

**Observația 2.** În ipotezele Observației 1, sunt echivalente:

$(i)$ Punctele $A,Q,P$ sunt coliniare;

$(ii)$ $PS=AN$;

$(iii)$ $AM=MC$.

*Soluție.* $(i)\Rightarrow(ii)$ Din ipoteză obținem că *AP II NS*. Concluzia Observației 1 implică *PS II AN*. Așadar *APSN* este paralelogram, deci $PS=AN$.

$(ii)\Rightarrow(iii)$ Cum *PS II MC* și *PN II AB* deducem că $\frac{PS}{MC}=\frac{BP}{BM}=\frac{AN}{AM}$. Așadar $\frac{AN}{MC}=\frac{AN}{AM}$, de unde concluzia.

$(iii)\Rightarrow(i)$ Fie $MQ\cap AB=\{U\}$. Atunci $\frac{AU}{UB}=\frac{AM}{MC}=1$. Cum $\frac{BP}{PM}=\frac{AN}{NM}$, rezultă că $\frac{AU}{UB}\cdot\frac{BP}{PM}\cdot\frac{MN}{NA}=1$ și, conform reciprocei teoremei lui Ceva, deducem că dreptele $AP,BN,MU$ sunt concurente. Cum $BN\cap MU=\{Q\}$, obținem $Q\in AP$, de unde concluzia.

Absența restricției ca punctul $M$ să fie mijlocul lui $[AC]$ permite și alte considerente. Mai precis:

**Qbservația 3.** În ipotezele Observației 1, următoarele afirmații sunt echivalente:

$(i)$ Punctele $Q,S,P$ sunt coliniare; $(ii)$ *QS II AC*; $(iii)$ $AN=MC$.

*Soluție.* $(i)\Rightarrow(ii)$ Din concluzia Observației 1 rezultă *PS II AC* și coliniaritatea punctelor $Q,S,P$ conduce la *QS II AC*.

$(ii)\Rightarrow(iii)$ Fie $AQ\cap BC=\{L\}$. Din *QS II AC*

obținem $\frac{QS}{AC}=\frac{LQ}{LA}$ $(1)$

Paralelismul dreptelor $NS$ și $AL$ duce la $\frac{AL}{NS}=\frac{AC}{CN}$ $(2)$

Înmulțind relațiile $(1)$ și $(2)$ obținem relația $\frac{LQ}{NS}=\frac{QS}{CN}$. Dar $AQSN$ este paralelogram, deci $\frac{LQ}{AQ}=\frac{AN}{CN}$. Pe de altă parte $\frac{LQ}{AQ}=\frac{CM}{MA}$, deci $\frac{AN}{CN}=\frac{CM}{MA}$, adică $\frac{AN}{AC}=\frac{CM}{AC}$, deci $AN=MC$.

$(iii)\Rightarrow(i)$ Din $PN$ *II* $AB$ rezultă că $\frac{AN}{NM}=\frac{BP}{PM}$, deci $\frac{CM}{NM}=\frac{BP}{PM}$ $(3)$

Cum $QM$ *II* $BC$ urmează că $\frac{BQ}{QN}=\frac{CM}{MN}$ $(4)$

Relațiile $(3)$ și $(4)$ conduc la $\frac{BQ}{QN}=\frac{BP}{PM}$. Așadar $QP$ *II* $AC$. Dar $PS$ *II* $AC$, de unde concluzia.

Invităm cititorul să descopere și alte relații în legătură cu problema sursă.

În continuare ne vom ocupa de determinarea funcțiilor $f$:R→R de forma $f(x)=ax+b,\ \ a,b$ numere reale cu proprietatea că $f(M)\subset M,$ unde $M$ este o submulțime de numere reale cu o anumită proprietate. Vom prezentara și unele probleme cunoscute, dar utile elevilor în fixarea unor cunoștințe necesare în pregătirea pentru examene și concursuri.

Vom determina așadar funcțiile $f$:R→R, $f(x)=ax+b,\ \ a,b\in$R, care verifică, separat, proprietățile:

**1)** $f(x)$ este număr natural, pentru orice număr natural $x$;

**2)** $f(x)$ este număr rațional, pentru orice număr rațional $x$;

**3)** $f(x)$ este număr irațional, pentru orice număr irațional $x$;

**4)** $f(M)\subset M$, unde $M$ este o mulțime finită de numere reale cu cel puțin două elemente;

**5)** $f(x)$ este pătrat perfect, pentru orice pătrat perfect $x$;

**6)** $f(x)$ este număr natural prim, pentru orice număr natural prim $x$.

**Soluție.**

**1)** Avem $b = f(0) \in \mathbf{N}$, $a = f(1) - b \in$ Dacă $a \le -1$ atunci $f(b+1) = ab + a + b = b(a+1) + a \le a < 0$, fals. Așadar $a$ este natural și toate funcțiile de această formă verifică ipoteza.

**2)** Din $f(0) = b \in \mathrm{Q}$ și $f(1) = a + b \in \mathrm{Q}$, se obține că $a, b \in \mathrm{Q}$ și toate funcțiile de acest fel verifică cerința.

**3)** Pentru $a = 0$ se obține că $b \in \mathrm{R}\backslash\mathrm{Q}$ și se verifică ipoteza. Fie în continuare $a \neq 0$. Dacă $\frac{b}{a} \in \mathrm{R}\backslash\mathrm{Q}$ atunci $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \in \mathrm{Q}$, contradicție. Așadar $\frac{b}{a} \in \mathrm{Q}$. Presupunem acum că $a \in \mathrm{R}\backslash\mathrm{Q}$. Atunci $\frac{1-b}{a} \in \mathrm{R}\backslash\mathrm{Q}$ și deci $1 = f\left(\frac{1-b}{a}\right) \in \mathrm{R}\backslash\mathrm{Q}$, fals. Prin urmare $a$ și $b$ sunt raționale, condiții și suficiente pentru a se verifica enunțul.

**4)** Fie $M = \{x_1, ..., x_n\}$, $n \ge 2$. Putem considera $x_1 < \cdots < x_n$. Dacă $a = 0$ atunci condiția este verificată pentru orice $b \in M$. Fie acum $a > 0$. Atunci $f(x_1) < \cdots < f(x_n)$ și cum $f(M) \subset M$, deducem că $f(x_1) = x_1$, $f(x_n) = x_n$, de unde $f(x) = x$, $x \in \mathrm{R}$, care convine. În cazul când $a < 0$ se obține că $f(x_1) > \cdots > f(x_n)$ de unde $f(x_1) = x_n$, $f(x_n) = x_1$, care conduc la $f(x) = x_1 + x_n - x$, $x \in \mathrm{R}$, care verifică ipoteza dacă și numai dacă elementele lui $M$ sunt în progresie aritmetică.

**5)** Avem $b = f(0) = u^2$, $u \in \mathrm{N}$. Dacă $u = 0$ se obține că $f(x) = ax$, $x \in \mathrm{R}$ cu $a = f(1)$ pătrat perfect și toate de această formă satisfac ipoteza. Fie acum $u \ge 1$. Avem $f(u^2) = u^2(a+1)$, care este pătrat perfect dacă și numai dacă $a + 1 = v^2$, $v \in \mathrm{N}$, $v \ge 1$. Apoi $f(4u^2) = u^2(4v^2 - 3)$. Cum $f(4u^2)$ este pătrat perfect rezultă că $4v^2 - 3 = t^2$, $t \in \mathrm{N}$, $t \ge 1$, de unde $(2v - t)(2v + t) = 3$ care conduce la $v = 1$, obținând astfel funcțiile de forma $f(x) = u^2$, $x \in \mathrm{R}$, care verifică.

În final, pentru a soluționa cerința **6)**, vom folosi următorul rezultat:

**Teoremă** (Dirichlet) Fie $a,b$ numere naturale nenule, prime între ele. Atunci șirul $an+b,\ n\in\mathrm{N},\ n\geq 1$ conține o infinitate de numere prime.

**6)** Avem $a=f(3)-f(2)\in\mathrm{Z},\ b=f(2)-2a\in\mathrm{Z}$. Dacă prin absurd $a\leq -1,$ considerând un număr prim $p\geq b,$ obținem că $f(p)=ap+b\leq 0,$ fals. Deci $a\in\mathrm{N}$. Să presupunem că $a\neq 0$ și $b\neq 0.$ Fie $p$ un număr prim astfel încât $p$ nu divide nici unul din numerele $a$ și $b.$ Atunci $a=pk+u,$ unde $k,u\in\mathrm{N}$ și $1\leq u\leq p-1.$ Numerele de forma $b+ui,\ i\in\{0,1,...,p-1\}$ dau resturi diferite la împărțirea cu $p.$ Într-adevăr, dacă ar exista $0\leq i<j\leq p-1$ astfel ca numerele $b+ui$ și $b+uj$ dau același rest la împărțirea cu $p,$ atunci $p/(j-i)u,$ fals. Există deci un număr natural $v$ cu $1\leq v\leq p-1$ așa încât $uv+b=pl,$ cu $l\in\mathrm{Z}.$ Conform teoremei lui Dirichlet, șirul $pn+v,\ n\in\mathrm{N}$ conține o infinitate de numere prime și fie $t\in\mathrm{N},$ $t\geq 2-l$ astfel încât numărul $q=pt+v$ este prim.

Atunci $f(q)=(pk+u)(pt+v)+b=p(pkt+kv+ut)+uv+b=$ $=p(pkt+kv+ut+l).$ Dar $pkt+kv+ut+l\geq ut+l\geq t+l\geq 2,$ deci $f(q)$ nu este prim, contradicție. În concluzie, $a=0$ sau $b=0.$ Pentru $a=0$ rezultă funcțiile de forma $f(x)=b,$ cu $b$ prim. În cazul $b=0$ obținem funcția identitate.

Invităm cititorul să studieze și alte probleme în spiritul celor de mai sus.

**Bibliografie**

Keng HL Introduction to Number Theory, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1982

Popovici CP Teoria numerelor, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973

Sierpinki W Ce știm șice nu știm despre numere prime, Editura Științifică, București, 1966

# În legătură cu o problemă propusă la etapa județeană de matematică a ONM, martie 2018

***Prof. Marina Constantinescu,***
Șc. Gen. Constantin Săvoiu, Tg-Jiu
***Prof. Mircea Constantinescu,***
C. N. Ecaterina Teodoroiu, Tg-Jiu

La etapa județeană a Olimpiadei de Matematică, în martie 2018, la Clasa a 7-a a fost propusă următoarea problemă:

Să se demonstreze că numărul $\sqrt{n+\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]}$ este irațional, pentru orice număr natural nenul $n$ (prin $\left[x\right]$ se înțelege partea întreagă a numărului real $x$).

*(autor prof. George Stoica, Petroșani)*

Vom extinde în continuare acest enunț după cum urmează:

Să se determine valorile numărului $\alpha\in(0,1)$ cu proprietatea că numărul $\sqrt{n+\left[\sqrt{n}+\alpha\right]}$ este irațional, pentru orice număr natural nenul $n$.

*Soluție.* Fie $\left[\sqrt{n}+\alpha\right]=k, k\in\mathbb{Z}, k\geq 1,$ deoarece $\sqrt{n}+\alpha>1.$

Rezultă dubla inegalitate

$k-\alpha\leq\sqrt{n}<k+1-\alpha.$ Cum însă $k-\alpha>0,$ obținem echivalent:

$(k-\alpha)^2\leq n<(k+1-\alpha)^2$, de $(k-\alpha)^2+k\leq n+k<(k+1-\alpha)^2+k.$

Cum $\alpha\in(0,1)$ deducem șirul de inegalități:

$$(k-1)^2<(k-\alpha)^2+k\leq n+k<(k+1-\alpha)^2+k<(k+2)^2 \quad (1)$$

Ne propunem acum să studiem în ce condiții ipoteza problemei nu se verifică, adică dacă există $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care numărul $\sqrt{n+k}$ este rațional. Cum $n+k\in\mathbb{N}^*$, aceasta este echivalent cu faptul că

numărul $n+k$ trebuie să fie pătratul unui număr natural nenul. Cum însă $(k-1)^2 < n+k < (k+2)^2$, sunt posibile două situații:

***Cazul 1***. Dacă $n+k=k^2$, adică $n=k^2-k$, obținem în (1):

$(k-\alpha)^2+k \le k^2 < (k+1-\alpha)^2+k$, adică:

$k^2-2k\alpha+\alpha^2+k \le k^2 < k^2+2k+1-2k\alpha-2\alpha+\alpha^2+k,$

echivalent cu $\begin{cases} k(2\alpha-1) \ge \alpha^2 \\ k(3-2\alpha) > 2\alpha-\alpha^2-1 \end{cases}$

Dacă $\alpha \in \left(\frac{1}{2},1\right) \Rightarrow 2\alpha-1>0,\ 3-2\alpha>0,$ și putem alege

$k \in \mathbb{Z}, k \ge 1$ astfel încât $k \ge \frac{\alpha^2}{2\alpha-1}$ și

$k > \frac{2\alpha-\alpha^2-1}{3-2\alpha}$, Anume

$k \ge k_\alpha := \max\left(\left[\frac{\alpha^2}{2\alpha-1}\right]+1, \left[\frac{2\alpha-\alpha^2-1}{3-2\alpha}\right]+1\right)$ și atunci

$n=k^2-k, k \ge k_\alpha$ verifică faptul că $\sqrt{n+\left[\sqrt{n}+\alpha\right]}=k \in \mathbb{Q}.$

***Cazul 2***. Dacă $n+k=(k+1)^2$, adică $n=k^2+k+1,$ obținem în (1):

$(k-\alpha)^2+k \le (k+1)^2 < (k+1-\alpha)^2+k,$ adică:

$k^2-2k\alpha+\alpha^2+k \le k^2+2k+1 < k^2+2k+1-2k\alpha-2\alpha+\alpha^2+k,$

sau:

$\begin{cases} k(2\alpha+1) \ge \alpha^2-1 \\ k(1-2\alpha) > 2\alpha-\alpha^2 \end{cases}$

Dacă $\alpha \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ obținem $k \ge \frac{\alpha^2-1}{2\alpha+1},\ k > \frac{2\alpha-\alpha^2}{1-2\alpha}$, și alegând

$k \geq k_\alpha := \max\left(\left[\frac{\alpha^2-1}{2\alpha+1}\right]+1, \left[\frac{2\alpha-\alpha^2}{1-2\alpha}\right]+1\right)$, se verifică cele două relații și astfel numerele

$n = k^2+k+1, k \geq k_\alpha$ verifică faptul că $\sqrt{n+\left[\sqrt{n}+\alpha\right]} = k+1 \in \mathbb{Q}$.

Cu alte cuvinte, singura valoare a lui $\alpha \in (0,1)$ pentru care se verifică cerința problemei este $\alpha = \frac{1}{2}$, fapt care o face, din acest punct de vedere, interesantă.

## Sisteme de doua ecuatii de gradul I cu doua necunoscute

***Prof. GIORGI VICTORIA***,
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

Se numeste sistem de doua ecuatii cu doua necunoscute un ansamblu de doua ecuatii cu aceleasi necunoscute.

Forma generala a sistemului de doua ecuatii de gradul Icu doua necunoscute este: $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

Sistemul de aceasta forma are solutia: $\begin{cases} x = \frac{bc'-cb'}{ba'-ab'} \\ y = \frac{ca'-ac'}{ba'-ab'} \end{cases}$.

Sistemul este determinat, adica are solutie unica,daca coeficientii necunoscutelor din cele doua ecuatii nu sunt proportionali: $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ .

Sistemul este nedeterminat, adica are o infinitate de solutii, daca coeficientii necunoscutelor si termenii liberi sunt proportionali: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$.

Sistemul este imposibil daca coeficientii necunoscutelor sunt proportionali, dar termenii liberi formeaza un raport diferit de raportul coeficientilor uneia din necunoscute: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$.

Doua sisteme sunt echivalente daca au aceleasi solutii. A rezolva un sistem de ecuatii inseamna a gasi solutia sau radacinile sistemului. Daca sistemul are doua necunoscute trebuie gasite perechile de numere care verifica sistemul dat. Pentru a rezolva un sistem de doua ecuatii de gradul I cu doua necunoscute, inlocuim sistemul dat printr-un sistem echivalent in care o ecuatie are o singura necunoscuta.

Pentru eliminarea uneia din necunoscute, se poate folosi una din metodele: substitutiei, reducerii sau comparatiei.

Metoda substitutiei: $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=\dfrac{c-ax}{b} \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

Metoda reducerii: $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} ax+by=c \\ \left(a'b-ab'\right)y=a'c-ac' \end{cases}$

Metoda comparatiei: $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=\dfrac{c-ax}{b} \\ y=\dfrac{c'-a'c}{b'} \end{cases}$

Exemple de sisteme care se rezolva prin procedee speciale:

1. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{7}{12} \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Introducem doua necunoscute ajutatoare notand: $\frac{1}{x}=a;\frac{1}{y}=b$ si rezolvam sistemul $\begin{cases} a+b=\frac{7}{12} \\ 2a-3b=-\frac{1}{2} \end{cases}$. Obtinem $a=\frac{1}{4};b=\frac{1}{3}$. Calculam necunoscutele initiale si sistemul are solutia: $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{2}{x+y}+\frac{7}{x-y}=\frac{5}{3} \\ \frac{4}{x+y}-\frac{9}{x-y}=-\frac{1}{2} \end{cases}$

Inlocuim $\frac{1}{x+y}=a;\frac{1}{x-y}=b$ si obtinem $\begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$.

# Concursul interjudeţean „Discipolii lui Pitagora” - ediţia a XIV-a, Drobeta Turnu Severin, 2018 -

## Clasa a IV-a

1. Un tâmplar trebuie să taie 3 scânduri, una de 7 m, a doua de 5 m și a treia de 8 m, în bucăți de către 1 metru. Știind că fiecare tăietură este făcută în 15 secunde, în cât timp termină tâmplarul?
2. .Aflați numerele naturale x și y care verifică egalitatea:
   $[3+(x\times y+31\times 8-603:3):9]\times 2+1994=2018$
3. La paginarea unei cărți s-au folosit 3837 de cifre. Să se determine numărul de pagini ale cărții.
4. Rareș spune: peste 13 ani voi avea vârsta pe care o avea mama acum 10 ani, iar peste 10 ani vârsta mea va fi de două ori mai mică decât a mamei . Câți ani am?

## Clasa a V-a

1. Aflați cifrele a și b dacă $\overline{2ab}\cdot 31-14=7240$ .
2. a) Comparați numerele $a$ și $b$ unde:
   $a=2^{717}\quad si\quad b=(5^{200}-4\cdot 5^{199}+9^{54}:3^{107}-5^{199})^{478}$
   b) Să se afle $a,b\in\mathbb{N}\quad b\ prim\ şi\quad a+b+a^2=508.$
3. Dacă într-o sală de clasă se așează câte trei elevi în bancă, rămân cinci bănci libere, iar dacă se așează câte doi, rămân cinci elevi în picioare. Câți elevi și câte bănci sunt în clasă?
4. Fie numărul A=$1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+\ldots+1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, $n\in N$, $n\geq 5$. Arătați că numărul 2018(A-4) nu este pătrat perfect.

## Clasa a VI-a

1. Ce rest se obţine prin împărţirea numărului A la 6, unde A= 5a+6b+3c+4d+11, ştiind că prin împărţirea lui a,b, c, d la 6 se obţin resturile 2,3,4 respectiv 5.
2. Aflaţi numerele $x_1, x_2, ..., x_{2018} \in \mathbf{N}$ astfel încât au loc relaţiile:

$$x_1 = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{3} = ... = \frac{x_{2018}}{2018} \quad \text{şi} \quad \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{2018}}{1009} = 2019$$

3. Se consideră punctele coliniare A,O,C în această ordine și punctul B nesituat pe dreapta AC astfel încât m($\angle AOB$)= $0,(6) \cdot$m ($\angle BOC$)). Se construiește $\angle BOD$, D$\in Int\ \angle BOC$,a cărui măsura este cu $20^\circ$ mai mică decât măsura unghiului $\angle AOB$. Determinați măsura unghiului $\angle DOC$.

4. Fie $A$ o mulțime de 10 numere naturale distincte cu proprietatea că pentru orice $a, b \in A$ rezultă că $a < 2b$. Să se determine mulțimea $A$ dacă suma tuturor elementelor sale este egală cu 145.

## Clasa a VII-a

1. Daca $a = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} - 3$ , calculati $a^{2018}$.

2. Să se determine numerele întregi x, y care verifică relația:
$$(x+1)(y+2) - (x-1)(2y-2) = 13 + 3y$$

**3.** Calculați partea întreagă și fracționară a numerelor:
a=1+2+3+…+9+10+$\frac{1}{10\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 12}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}$

4. În triunghiul dreptunghic ABC, cu m($\hat{A}$)=90° și m($\hat{B}$) = 5· m($\hat{C}$), se construiește AD⊥BC, D∈[BC]. Dacă AD=5cm, calculați aria triunghiului ABC.

## Clasa a VIII-a

1. a) Dacă $\frac{1}{a}$ este media aritmetică a numerelor $\frac{2}{a-b}$ și $\frac{2}{a-c}$ atunci $a^2 = bc$.

b) Să se rezolve ecuația: $\frac{1}{x^2+2x} + \frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{x^2+2x+1}$.

2. Se consideră numerele a,b$\in \mathbb{R}_+$ astfel încât a+b=1. Să se arate că:

$\sqrt{2018a+1} + \sqrt{2018b+1} \leq 1010$.

3. Fie funcția liniară $f : R \to R$ care verifică relația:

2f(x)-f(x+1)=3x+2.

Determinați funcția f și sinusul unghiului format de axa Ox cu graficul funcției f.

4. Fie VABC o piramidă regulată în care $VA = 12\sqrt{2}$ și M mijlocul laturii BC. Știind că VA $\perp$ VM, să se afle:

a. Latura și apotema piramidei
b. Volumul piramidei
c. Măsura unghiului diedru format de planele (VAB) și (VAM).

# Probleme propuse

## Clasa a IV-a

1. Află a, b si c stiind că: 60:a=b, b:c=10, 90:c=30

***Firoiu Felicia***,
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

2. Dacă pun câte un măr pe un taler,un măr nu am pe ce-l pune. Dacă pun câte două mere pe un taler, rămâne un taler liber.
Câte mere si câte talere sunt?

***Firoiu Felicia***,
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

3. Află pe "x" din :{[(a: 4+5)+9]:3-6}·9=18

***Firoiu Felicia***,
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

4. Fie numarul N=10200300400005.....49,obtinut prin scrierea fără spații a numărului natural de la 1 la 49,fiecare, cu excepția lui 49,fiind urmat de un numar de zerouri egal cu valoarea sa.
a. Determinati cifra de pe locul 54,
b.Determinati numarul de cifre ale lui H.

***Militaru Daniela***,
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

5. Anii de nastere a doua persoane reprezintă numere naturale scrise cu aceleași cifre nenule.Aflați acești ani,știind că persoanele sunt născute in prima jumătate a secolului al XX-lea și că una dintre ele este cu 27 de ani mai mare decat cealaltă.

***Militaru Daniela***,
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

6. Determinati deimpărțitul, împărțitorul,câtul și restul împarțirii a doua numere naturale știind că diferența dintre deîmparțit și rest este 102,iar restul este un număr impar de trei cifre.

***Militaru Daniela,***
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

7. Robert urcă treptele unei scări după urmatoarea regulă -urcă trei trepte,apoi coboară doua trepte,urcă din nou cinci trepte și coboară o treapta.
   a. Aflați pe ce treaptă se află robert după 736 pași.
   b. Determinați după câti pași ajunge Robert prima dată pe treapta 736.
   Un pas înseamnă urcarea sau coborârea unei trepte.

***Militaru Daniela,***
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

8. Pregatindu-se pentru olimpiada, Georgeta a rezolvat in patru zile probleme. In prima zi a rezolvat cu 6 mai multe decat 1/3 din numarul total, a doua zi cu 8 mai putine decat 1/4 din rest, a treia zi 3/5 din noul rest, iar in ultima zi ultimele 20 de probleme. Cate probleme a rezolvat Georgeta in fiecare zi ? Dar in total?

***Iordaconiu Otilia,***
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

9. Câtul numerelor 1008 si 3 a fost scazut din cel mai mic numar natural de 5 cifre, apoi rezultatul a fost împartit la un numar necunoscut. Noul rezultat a fost adunat cu diferenta a doua numere consecutive pare, obtinandu-se 1210. Afla numarul necunoscur.

***Iordaconiu Otilia,***
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

10. Catul unei impartiri cu rest nenul este 842 iar impartitorul de 421 de ori mai mic. Afla deimpartitul.

***Iordaconiu Otilia,***
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

11. Mihai avea de rezolvat un anumit număr de probleme. El și-a propus să le rezolve în mod egal,în 10 zile.Rezolvând în fiecare zi cu trei probleme mai mult față de ceea ce și-a propus,a reușit să termine cu două zile mai devreme.Câte probleme a avut de rezolvat în total?

***Stroe Loredna***,
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

12. Pentru 15 kg de caise și 20 kg de piersici s-au plătit 160 lei,iar pentru 15 kg de caise și 10 kg de piersici ,de aceeași cantitate,s-au plătit 110 lei.
Cât costă un kilogram de piersici și cât costă un kilogram de caise?

***Stroe Loredna***,
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

13. La o grădiniță s-a adus o cantitate de lapte.La micul dejun s-a consumat 1/3 din cantitate,iar cu 2/3 din rest s-au preparat prăjituri.Dacă au rămas 8 litri ,ce cantitate de lapte s-a adus la grădiniță?

***Stroe Loredna***,
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

14. Pe terenul de joacă sunt de 3 ori mai mulți băieți decât fete. După ce pleacă 3 băieți și 3 fete, pe teren rămân de 5 ori mai mulți băieți decât fete.Câți băieți și câte fete au fost la început pe terenul de joacă?

***Stroe Loredna***,
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

15. Al doilea număr este cu 15 mai mare decât primul,iar al treilea este cu 15 mai mare decât dublul celui de-al doilea.Diferența dintre primul și al treilea număr este 105.
Află cele trei numere.

***Stroe Loredna***,
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

16. O familie este formată din tată, mamă și copil. În prezent, suma vârstelor este de 64 de ani, iar în urmă cu 8 ani această sumă era de 43 de ani. Câți ani are fiecare, dacă tatăl este cu 25 de ani mai mare decât copilul?

***Predescu Ciurea Carmen***,
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

17. Un copil are un pahar plin cu suc. El bea jumătate din conținut și-l umple cu apă, apoi din nou jumătate din noul conținut, îl umple din nou cu apă și bea tot conținutul paharului . Câtă apă și cât suc a băut copilul?

***Predescu Ciurea Carmen,***
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

18. Maria are de rezolvat 2 fișe cu câte 20 probleme fiecare. De pe prima fișă a rezolvat un număr de probleme, iar de pe a doua atâtea probleme câte i-au mai rămas de pe prima fișă. Câte probleme mai are de rezolvat Maria?

***Predescu Ciurea Carmen***,
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

19. Trebuie sădiți 60 de pomi. Dacă va lucra numai clasa a III –a, atunci se vor sădi în 6 ore, iar dacă va lucra numai clasa a IV –a se vor sădi în 3 ore. În cât timp vor fi sădiți pomii, dacă cele două clase vor lucra împreună, în același ritm de lucru?

***Predescu Ciurea Carmen***,
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

20. Cum pot fi așezate 14 scaune de-a lungul celor patru pereți ai unei camera, astfel ca în dreptul fiecărui perete să se poată număra un număr egal de scaune?

***Predescu Ciurea Carmen,***
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

21. Se consideră trei numere naturale. Dacă se împarte primul la al doilea, se obține câtul 4 și restul 3, iar dacă se împarte al doilea la al treilea, se obține câtul 3 și restul 2. Aflați numerele, știind că suma dintre primul și al treilea este 154.

***Viezure Luminita,***
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

22. Maria are o sumă de bani. După ce dublează această sumă, ea cheltuiește 200 lei. Dublează restul și apoi dă unei prietene 400 lei. Dublează noul rest, cheltuiește 600 lei, după care constată că îi mai rămân 1000 lei. Aflați câți lei a avut Maria la început.

***Viezure Luminita,***
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

23. Șase plăcuțe identice de gresie, având formă de pătrat, formează un dreptunghi cu perimetrul 280 cm. Ce lungime are latura unei plăcuțe?

***Istratie Claudia-Liliana,***
*Școala Gimnazială "Sfântul Nicolae"*

24. Scriem numerele naturale nenule pe mai multe rânduri, în felul următor:

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
11 12 13 14 15
……

a) Câte numere sunt pe primele 19 rânduri ?
b) Pe ce rând se află numărul 75 ?

***Viezure Luminita,***
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

25. Fie șirul: 1; 3 + 5; 7 + 9 + 11; ……. . Calculați al șaselea termen.

***Istratie Claudia-Liliana***,
*Școala Gimnazială "Sfântul Nicolae"*

26. Într-o clasă sunt în total 30 de băieți și fete. Aflați câți băieți și câte fete sunt, știind că, dacă ar fi cu 2 băieți mai puțin, atunci jumătatea numărului lor ar reprezenta de două ori mai mult decât a treia parte din numărul fetelor.

***Istratie Claudia-Liliana,***
*Școala Gimnazială "Sfântul Nicolae"*

27. Suma a trei numere este 606. Găsiți numerele știind că al doilea este cu 3 mai mic decât jumătatea primului, iar al treilea este de 3 ori mai mic decât al doilea.

***Istratie Claudia-Liliana***,
*Școala Gimnazială "Sfântul Nicolae"*

28. În curtea bunicului sunt găini, rațe și curci. 27 din ele nu sunt găini, iar 39 nu sunt curci. Numărul găinilor este de 2 ori mai mare decât al curcilor. Câte păsări de fiecare fel sunt?

***Istratie Claudia-Liliana,***
*Școala Gimnazială "Sfântul Nicolae"*

29. Mihai are în insectar păianjeni (cu 8 picioare) și cărăbuși (cu 6 picioare). Știind că sunt 8 insecte, având împreună 54 de picioare, aflați câți păianjeni și câți cărăbuși sunt în insectar.

***Istratie Claudia-Liliana,***
*Școala Gimnazială "Sfântul Nicolae"*

30. Radu și Denis au împreună 69 de bomboane. Dacă Radu i-ar da lui Denis 9 bomboane, atunci radu ar avea de două ari mai multe bomboane decât Denis. Câte bomboane are fiecare copil?

***Mazilu Alina Victoria***,
*Școala Gimnazială „Al. Ștefulescu"*

31. Mă gândesc la un numar, dacă îl micșorez cu 8, atunci jumătate din noul număr este cu 5 mai mare decît sfertul numărului initial. Aflați numărul initial.

***Mazilu Alina Victoria***,
*Școala Gimnazială „Al. Ștefulescu"*

32. Să se determine numărul $\overline{abcdef}$ care îndeplinește simultan condițiile:
i)$\overline{abc} + \overline{def} = 549$
ii) $\overline{def} - \overline{abc} = 55$

***Mazilu Alina Victoria,***
*Școala Gimnazială „Al. Ștefulescu"*

33. Aflați numerele $\overline{ab}$ , știind că $\overline{ab} + \overline{ba} = 77$ și a-b=3.

***Popescu Adrian C-tin***,
*Școala Gimnazială „Sf. Nicolae"*

34. Aflați numerela a,b,c și d știind că suma lor este 80, iar dacă la primul număr adăugăm 3, din al doilea scădem 3, pe al treilea îl mărim de trei ori, iar pe al patrulea îl micșorăm de trei ori, obținem același număr.

***Popescu Adrian C-tin,***
*Școala Gimnazială „Sf. Nicolae"*

35. Aflați numărul xyz cu cifre distincte, cunoscând relația : xyz +zyx=1777

***Staicu-Pîrvu Denisa***,
*Școala Gimnazială „Sf.Nicolae"*

36. Se dau trei numere naturale. Dacă din primul număr se ia 55555, din al doilea 66666, iar din al treilea 77777, rămân trei numere identice, având împreună o sumă egală cu dublul sumei luate.

Care au fost cele trei numere?

***Staicu-Pîrvu Denisa,***
*Școala Gimnazială „Sf.Nicolae"*

37. Roxana are două clasoare cu timbre. Ea mută 130 de timbre din al doilea clasor în primul și constată că acum sunt cu 44 de timbre mai multe în primul decât în al doilea. Câte timbre sunt în fiecare clasor, dacă primul clasor a avut un sfert din numărul timbrelor celui de-al doilea?

***Staicu-Pîrvu Denisa,***
*Școala Gimnazială „Sf.Nicolae”*

38. Într-o sală de mese a unei cantine sunt 30 de mese cu câte 4 și 6 locuri. Toate locurile sunt ocupate de 130 de elevi. Să se afle câți elevi stau la mesele cu câte 4 locuri. Dar la cele cu câte 6 locuri?

***Staicu-Pîrvu Denisa***,
*Școala Gimnazială „Sf.Nicolae”*

## Clasa a V-a

1. Să se determine $n \in N$ astfel încât $\frac{9^n + 6^n}{4^n + 8^n} \in N$.

***Ducan Andreea,***
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

2. Aflati cifra x din egalitatea : $\frac{\overline{x2}}{41} + \frac{\overline{4x}}{8} + \frac{\overline{x2x}}{3} = 284$

***Ducan Andreea***,
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

3. a) Demonstrați că 1+3+5+7+.....+(2·n-1) este pătrat perfect pentru orice n ϵ $\mathbb{N}^*$.
b) Arătați că 2+4+6+.....+2·n nu poate fi pătrat perfect pentru niciun n ϵ $\mathbb{N}^*$.

Elev : ***Vasile Marian Daniel***,
*C.N.P „Șt. Odobleja"- Dr. Tr. Severin, cls a X-a*

4. Determinați perechile (a, b) de numere naturale cu proprietatea că: $a^2$|b+1 și $b^2$|a+1.

Elev : ***Vasile Marian Daniel***,
*C.N.P „Șt. Odobleja"- Dr. Tr. Severin, cls a X-a*

5. Fie n un număr natural. Arătați că: n·(n+1)·(n+2)·(n+3)·(n+4) +7 nu este pătrat perfect pentru niciun n ϵ $\mathbb{N}$.

Elev : ***Vasile Marian Daniel***,
*C.N.P „Șt. Odobleja"- Dr. Tr. Severin, cls a X-a*

6. Dacă adunăm numărul $\overline{abc}$ cu răsturnatul său obținem numărul 827. Aflați numărul știind că b este dublul lui a și cu 2 mai mare decât c.

Elev : ***Vasile Marian Daniel***,
*C.N.P „Șt. Odobleja"- Dr. Tr. Severin, cls a X-a*

7. Pentru numerotarea paginilor unei cărți s-au folosit 2019 cifre. Câte pagini are cartea?

***Elev : Vasile Marian Daniel***,
*C.N.P „Șt. Odobleja”- Dr. Tr. Severin, cls a X-a*

8. Se dă numărul $a = 2019 + 2019^2 + 2019^3 + .... + 2019^{2019}$.
   a) Gasiti numărul $a$ .
   b) Ce rest obținem daca impartim pe $2019^{2019}$ la 2018?

***Bondoc Gabriela Roxana***,
*C.N.P „Șt. Odobleja”*

9. Fie numarul $A=1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+\ldots+1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$, $n\in N$, $n\geq 5$ Aratati ca numarul 2019(A-10) nu este patrat perfect.

***Bondoc Gabriela Roxana***,
*C.N.P „Șt. Odobleja”*

10. Să se arate că numerele $A = 207^{46} + 832^{43}$, $B = 7^{34} + 7^{17}$ nu sunt pătrate perfecte

***Bondoc Gabriela Roxana***,
*C.N.P „Șt. Odobleja”*

11. Comparați numerele : $2^{2010}$ și $81^{1+2+3+...+24}$.

***Hortopan Doru***,
*Școala Gimnazială “Sf. Nicolae”*

12. Arătați că numărul: $2009^{2011} - 2011^{2009} - 1$ este divizibil cu 3.

***Hortopan Doru,***
*Școala Gimnazială “Sf. Nicolae”*

13. . Să se arate că dacă $\frac{a+b}{2} = \frac{\overline{ba}}{4}$, atunci $\overline{ab} = (a+b)^2$

***Hortopan Doru***,
*Școala Gimnazială “Sf. Nicolae”*

14. Determinați numerele de forma $\overline{ab}$ cu proprietatea că $\overline{ab} = 1+2+3+...+(a+b)$

***Hortopan Doru,***
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

15. Să se calculeze suma primelor $100$ de numere naturale nenule care nu sunt divizibile nici cu $2$ și nici cu $3$.

***Constantinescu Marina,***
*Școala Gimnazială „Constantin Savoiu"*

16. Se consideră numerele naturale nenule distincte $a, b, c, d$ cu proprietatea că $a$ divide $b$, $b$ divide $c$ și $c$ divide $d$. Să se determine aceste numere dacă $a+b+c+d=107$.

***Constantinescu Mircea,***
*CN„Ecaterina Teodoroiu"*

17. Determinați cifrele a şi b şi numărul natural x astfel încât:$6\cdot(2x + 5)^2 = \overline{7ab}$

***Stoicoiu Simona,***
*Școala Gimnazială "Constantin Savoiu"*

18. Să se determine numerele naturale nenule care împărţite la 9 dau câtul q şi restul r, iar împărţite la 17 dau câtul r și restul q.

***Stoicoiu Simona,***
*Școala Gimnazială "Constantin Savoiu"*

19. Determinți numarul prim p, și n care împreuna cu $n^2$+n+37 să dea 2019 unde n este numar natural.

***Popescu Adrian C-tin,***
*Școala Gimnazială „Sf. Nicolae"*
***Novac Popica Adrian,***
*Liceul Teoretic Novaci*

20. Determinați numerele naturale de forma $\overline{xyzy}$ , scise în baza zece, care îndeplinesc simultan condițiile:
I) $\overline{zyz} \vdots \overline{xz}$
II) Numărul $\overline{yzy}$este divizibil cu 9

***Popescu Adrian** C-tin,*
*Școala Gimnazială „Sf. Nicolae”*

21. Determinaţi numerele prime a şi b ştiind că 28 a + 21b =2030.
***Tica Bogdan si Lupulet Ion,** Liceul Tehnologic “Ion Mincu”*

22. Aratati ca $\frac{9}{2\cdot 5}+\frac{9}{5\cdot 8}+...+\frac{9}{49\cdot 52}<\frac{3}{2}$

***Giorgi Victoria**,*
*Școala Gimnazială “Sf. Nicolae”*

23. Aratati ca numerele de forma $2^n\cdot 5^{n+2}\cdot 7^3-8575, n\in\mathbb{N}$ sunt divizibile cu 315.

***Velcea Emilia,***
*Liceul Teoretic“Mircea Eliade” , Lupeni*

## Clasa a VI-a

1. Aratati ca $(2021^{2020} - 4^{1010}) \vdots 2019$

***Bondoc Gabriela Roxana,***
*C.N.P „Șt. Odobleja”*

2. Sa se gaseasca numerele intregi x si y dacă
$3(x+1) + y(x+3) - 3y(x+1) - 5(x+3) = 6$

***Bondoc Gabriela Roxana,***
*C.N.P „Șt. Odobleja”*

3. Aflati x daca $x \cdot \left( \frac{2}{1 \cdot 3} \div \frac{2}{3 \cdot 5} \div \frac{2}{5 \cdot 7} \div .... + \frac{2}{17 \cdot 19} \right) = \frac{3}{38}$

***Bondoc Gabriela Roxana,***
*C.N.P „Șt. Odobleja”*

4. Aflati $x,y \in Z$ daca $|3x+9| + |10y - 50| \leq 0$

***Bondoc Gabriela Roxana,***
*C.N.P „Șt. Odobleja”*

5. Se considera punctele coliniare A,O,B in aceasta ordine si punctele C si D de o parte si de alta a dreptei AB, (OM bisectoarea lui $\prec BOC$ ,iar (ON bisectoarea lui $\prec BOD$. Daca m $(\prec COD) = 100^0$ si m $(\prec AOD) = 3 \cdot m(\prec COA)$ ,aflati :a) $m(\prec COA)$, b) $m(\prec MON)$, c) $m(\prec AON)$

***Bondoc Gabriela Roxana,***
*C.N.P „Șt. Odobleja”*

6. Unghiurile AOB,BOC,COD si DOA formate in jurul punctului o au masurile direct proportionale cu 2, 6, 3 si 7. Aratati ca punctele B,O,D sunt coliniare.

***Bondoc Gabriela Roxana,***
*C.N.P „Șt. Odobleja”*

7. Câte numere de forma $\overline{abc}$ se divid cu 7 dacă $a+b+c$ se divide cu 7 ?

***Hortopan Doru,***
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

8. Având construit un unghi cu măsura de $19^o$, construiți cu rigla și compasul un unghi cu masura de $37^o$.

Hortopan Doru,
Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"

9. Fie numerele naturale x şi y astfel încât:
$x - 16 = 15\cdot(16 + 16^2 + 16^3 + \ldots. + 16^{n-1})$, $n \geq 2$, $n \in N$,
$y - 13 = 2^p\cdot(5 + 5^2 + 5^3 + \ldots. + 5^p)$, $p \geq 1$, $p \in N$.
Stabiliţi care din aceste numere este pătrat perfect.

***Stoicoiu Simona****,*
*Școala Gimnazială "Constantin Savoiu"*

10. Unghiurile AOB, BOC, COD, DOE sunt adiacente şi cu interioarele disjuncte, astfel încât punctele A, O şi E sunt coliniare. Măsurile unghiurilor AOB, BOC, COD, DOE formează respectiv cu patru numere naturale nenule consecutive, rapoarte egale. Să se demonstreze că două dintre unghiuri sunt complementare.

***Stoicoiu Simona****,*
*Școala Gimnazială "Constantin Savoiu"*

11. Determinați numerele întregi a, b, c, d, e știind că:
$\frac{a}{5} = \frac{b}{4} = \frac{c}{3} = \frac{d}{2} = \frac{e}{1}$ și $a - 2\cdot b + 3\cdot c - 4\cdot d + 5\cdot e = -12$.

***Alina Mondoc,***
*Școala Gimnazială Dalboșeț, jud. Caraș Severin*

12. Fie $\Delta ABC$ dreptunghic în A, pe ipotenuza BC se ia punctul M. Construim simetricul său față de AB notat cu N și simetricul față de AC notat cu P.
a) Să se arate că unghiurile $\sphericalangle BAN$ și $\sphericalangle CAP$ sunt complementare.

b) Dreptele MP și NP se intersectează în D.
Demonstrați că ΔMBD este isoscel.

***Alina Mondoc***,
*Şcoala Gimnazială Dalboşeț, jud. Caraș Severin*

24. Demonstrați că dacă a,b,c, și d sunt numere naturale nenule care îndeplinesc condiția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, atunci numărul natural M=$a^{2019}+b^{2019}+c^{2019}+d^{2019}$ este un număr compus.

***Popescu Adrian C-tin***,
*Şcoala Gimnazială „Sf. Nicolae”*

25. Numerele 1333 şi 351 dau resturile 13 şi respectiv 15 la împărţirea cu acelaşi număr natural diferit de zero. Aflaţi acest număr.

***Tica Bogdan si Lupulet Ion***,
*Liceul Tehnologic “Ion Mincu”*

26. Determinaţi numerele naturale cuprinse între 1200 şi 5200 care împărţite la 20 ;28 ;36 să dea de fiecare dată restul 5.

***Tica Bogdan si Lupulet Ion,***
*Liceul Tehnologic “Ion Mincu”*

27. Aflaţi cel mai mic număr natural care împărţit pe rând la 5,6,7,8, dă resturile 4,5,6,7.

***Tica Bogdan***, *Liceul Tehnologic “Ion Mincu”*

28. Numerele 1333 şi 351 dau resturile 13 şi respectiv 15 la împărţirea cu acelaşi număr natural diferit de zero. Aflaţi acest număr.

***Tica Bogdan***,
*Liceul Tehnologic “Ion Mincu”*

29. Daca $A=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)...\left(1-\frac{1}{2020}\right)$ si $B=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)...\left(1+\frac{1}{2020}\right)$, calculati $2020\cdot AB$

***Giorgi Victoria***,
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

30. Calculati: $\left(2^3\right)^7-\left(2^7\right)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^{34}+(-9)^{-17}$

***Giorgi Victoria***,
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

31. Fie triunghiul ABC echilateral si punctele M si N pe BC astfel incat BM = CN. Sa se arate ca unghiul BAC si unghiul MAN au aceeasi bisectoare.

***Giorgi Victoria***,
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

32. Determinati valoarea maxima a raportului $\frac{x}{y}; x, y \in \mathbb{N}$ stiind ca xy=(y+11)(x-13)

***Velcea Emilia,***
*Liceul Teoretic "Mircea Eliade", Lupeni*

33. Aflati numarul x stiind ca numerele 1+x, 8+x si 29+x au un divizor comun.

***Velcea Emilia***,
*Liceul Teoretic "Mircea Eliade", Lupeni*

34. Fie triunghiul isoscel ABC cu AB=AC.Pe latura BC se iau punctele D si E astfel incat $\frac{DC}{BD}=\frac{EB}{CE}$. Demonstrati ca triunghiul ADE este isoscel.

***Velcea Emilia***,
*Liceul Teoretic "Mircea Eliade", Lupeni*

35. In triunghiul ABC dreptunghic in A , inaltimea AD se intersecteaza cu bisectoarea CM in punctul P. Demonstrati ca triunghiul AMP este isoscel. Daca D' este simetricul lui D fata de AC, aratati ca triunghiul CDD' este isoscel.

***Velcea Emilia***,
*Liceul Teoretic "Mircea Eliade", Lupeni*

36. Calculați media aritmetică a numerelor:

$$a=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2015} \text{ si } b=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{2014}{2015}$$

***Pîrvulescu Eugenia***,
*Școala Gimnazială Nr.1 Popești, Giurgiu*

37. Arătați că numărul $A=3\cdot2^n+2^{n+1}+5\cdot2^{n+1}+2^{n+3}$ este divizibil cu 23 oricare ar fi $n \in N$.

***Pîrvulescu Eugenia***,
*Școala Gimnazială Nr.1 Popești, Giurgiu*

38. Arătați că numărul A este pătrat perfect, unde :

$$A=(2+4+6+\ldots+4030)\cdot\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{2015\cdot2016}\right)$$

***Pîrvulescu Eugenia***,
*Școala Gimnazială Nr.1 Popești, Giurgiu*

39. Unghiurile $\angle AOB$ și $\angle BOC$ sunt adiacente suplementare, (ox și (oy sunt respectiv bisectoarele lor. Dacă $\angle BOY=\frac{1}{6}\angle COX$.
Aflați măsurile unghiurilor :
$\angle AOB$ și $\angle BOC$, $\angle AOY$ și $\angle COX$.

***Pîrvulescu Eugenia***,
*Școala Gimnazială Nr.1 Popești, Giurgiu*

## Clasa a VII-a

1. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^0$, $D \in (BC)$, iar $r_1$si $r_2$ razele cercurilor inscrise in triunghiurile ABD, respective ACD. Aratati ca: $r_1 + r_2 < p - AD$, unde p este semiperimetrul triunghiului ABC.

***Ducan Andreea***,
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

2. Fie triunghiul ABC si M,N si P mijloacele laturilor [AB], [AC], respectiv [BC] , iar D un punct arbitrar pe latura [BC] diferit de punctul P.Sa se arate ca $\Delta DMN \equiv \Delta PNM \Leftrightarrow AD \perp BC$.

***Bondoc Gabriela Roxana***,
*C.N.P „Șt. Odobleja"*

3. Aflati x,n$\in$**N** astfel incat $\left[\frac{x}{3}\right] = \frac{5n+13}{n+2}$.

***Bondoc Gabriela Roxana***,
*C.N.P „Șt. Odobleja"*

4. Calculati $S = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + ..... + \frac{1}{98\cdot 99\cdot 100}$

***Bondoc Gabriela Roxana***,
*C.N.P „Șt. Odobleja*"

5. Determinati multimea A = $\left\{\sqrt{\frac{3x+2}{5x-8}} \in N\right\}$

***Bondoc Gabriela Roxana***,
*C.N.P „Șt. Odobleja"*

6. Fie ABC un triunghi dreptunghic de laturi a, b, c. Dacă între catete există relația $4b^2 + 4c^2 + 2b^4 = b^4c^2$ arătați că înălțimea acestui triunghi este $\sqrt{2}$.

***Hortopan Doru***,
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

7. Pentru ce valori ale lui $n \in N$ expresia $\sqrt{n^2 - 43n + 480} \in N$?

***Hortopan Doru***,
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae*"

8. Se consideră numerele naturale nu neapărat distincte $a_1, a_2, \ldots, a_7$ astfel încât $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_7^2 = 2015$.
a) Să se dea un exemplu de șapte astfel de numere.
b) Să se arate că,sau toate cele șapte numere sunt impare, sau exact trei dintre acestea sunt impare.

***Constantinescu Mircea***, *CN,,Ecaterina Teodoroiu"*

9. Fie $O$ mijlocul unui segment $[AB]$ și punctele $M, N$ situate de aceeași parte a dreptei $AB$ astfel încât $m(\sphericalangle AMO) = m(\sphericalangle BNO) = 90^\circ$. Fie $AM \cap BN = \{C\}$. Dacă $MN \parallel AB$
Să se arate că $\triangle ABC$ este dreptunghic sau isoscel.

***Constantinescu Marina***,
*Școala Gimnazială ,,Constantin Savoiu"*

8. Să se determine câte perechi de numere naturale $(a, b)$ verifică relația $\left|a - \sqrt{2019}\right| + \left|b - \sqrt{2019}\right| = 20$.

***Constantinescu Marina,***
*Școala Gimnazială ,,Constantin Savoiu"*

9. Să se determine numerele naturale $a$ și $b$ pentru care $an^2 + b$ este pătrat perfect pentru orice număr natural $n$.

***Constantinescu Mircea***,
*CN,,Ecaterina Teodoroiu"*

10. Fie $n$ număr natural, $n \geq 2$. Să se determine $n$ dacă suma a $n$ numere naturale impare consecutive este egală cu 100.

***Constantinescu Mircea***,
*CN,,Ecaterina Teodoroiu"*

11. Să se determine cifrele distincte a, b, c, d $\in$N - $\{9\}$ știind că a+b+c=2d, a<c<d<b și $\overline{a,(bcd)}+\overline{b,(cda)}+\overline{c,(dab)}+\overline{d,(abc)}=10$, numerele fiind scrise în baza 10.

***Stoicoiu Simona,***
*Școala Gimnazială "Constantin Savoiu"*

12. Fie M un punct în interiorul pătratului ABCD astfel încât triunghiul ABM să fie echilateral. Fie N$\in$(DM astfel încât măsura unghiului CNM să fie de $15^0$.
    a) Să se demonstreze că $[NC] \equiv [AB]$ și $[BM] \equiv [BN]$.
    b) Dacă BM$\cap$CN = {Q} și CN$\cap$AB = {E} și AB = a, determinați lungimile segmentelor QN și QE.

***Stoicoiu Simona***,
*Școala Gimnazială "Constantin Savoiu"*

13. Determinați elementele mulțimii
    A= { $x \in \mathbb{Z} \setminus \{1\} | \frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}-2\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{11-4\sqrt{6}}}{x-1} \in \mathbb{Z}$}.

***Alina Mondoc***,
*Școala Gimnazială Dalboșeț, jud. Caraș Severin*

14. În triunghiul isoscel ABC, AB=AC=42, m($\sphericalangle$BAC)= $45^\circ$, BM $\perp$ AC, M $\in$ (AC). Calculați:
    a) Aria triunghiului ABC și lungimea înălțimii BM.
    b) Tangenta unghiului ABC.

***Alina Mondoc,***
*Școala Gimnazială Dalboșeț, jud. Caraș Severin*

15. Fie numerele $a = 475^4\text{-}2\cdot 476^2\text{+}180$ si $b = 13^4\text{-}2\cdot 14^2\text{+}55$
    I) Arătați că numerele a și b sunt pătrate perfecte
    II) Demonstrati ca : $\sqrt{a} \ \vdots \sqrt{b}$

***Popescu Adrian C-tin***,
*Școala Gimnazială „Sf. Nicolae”*

16. Se da dreptunghiul ABCD cu AB=18cm si BC=6cm. Fie P pe CD astfel incat CD=3PC. Daca AP si BC se intersecteaza in M, calculati aria triunghiului MPC si distant de la B la AM.

***Giorgi Victoria,***
*Școala Gimnazială “Sf. Nicolae”*

17. Fie triunghiul ABC dreptunghic in A cu $m(\sphericalangle B) = 75^\circ$ si $BC = 8\sqrt{2}$. Calculati perimetrul si aria triunghiului

***Velcea Emilia,***
*Liceul Teoretic “Mircea Eliade” , Lupeni*

## Clasa a VIII-a

1. Exista $n \in (0;3)$ pentru care sunt indeplinite simultan conditiile:
$x + y + z = n \ si \ xy + yz + zx = n, \quad unde \ x, y, z \in \mathbb{R}$ ?

***Ducan Andreea***,
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

2. Aratati ca daca $x^2 + y^2 + z^2 = 4\sqrt{xyz} \quad cu \ x, y, z \in \mathbb{R}_+$ atunci $x + y + z \geq 2\sqrt{xyz}$.

***Ducan Andreea,***
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

3. Fie functia liniara $f : R \to R$ care verifica relatia 3f(x)+2f(x-1)=25x.

Determinati functia f si sinusul unghiului format de axa Ox cu graficul functiei f.

***Bondoc Gabriela Roxana***,
*C.N.P „Șt. Odobleja"*

4. Determinati functia $f : R \to R$ care verifica relatia 3f(2x-3)+12x=f(2)+24

***Bondoc Gabriela Roxana***,
*C.N.P „Șt. Odobleja"*

5. Simplificati fractia $\dfrac{(x^2+3x+1)(x^2+3x+9)+7}{(x^2+3x+1)(x^2+3x+5)+3}$.

***Bondoc Gabriela Roxana***,
*C.N.P „Șt. Odobleja"*

6. Dacă $a, b, c \in R$ și $a+b+c=6$, $a^2+b^2+c^2=18$ atunci:
Pentru ce valori ale numerelor a și b numărul c este maxim ?
Care este acea valoare a lui c ?

***Hortopan Doru,***
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

7. Câte numere iraționale a și b, cu proprietatea că $a+b=ab\in N$, există ?

***Hortopan Doru***,
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

8. Dacă $x+\frac{1}{x}=k$ calculați $x^9+\frac{1}{x^9}$ în funcție de k.

***Hortopan Doru,***
*Școala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

9. Se consideră piramida triunghiulară regulată $VABC$ de bază $ABC$ având fețele laterale triunghiuri ascuțitunghice. Fie $AD\perp VB,\ D\in(VB)$ și $DE\perp VC,\ E\in(VC)$. Dacă $DE\cap BC=\{F\},$ să se arate că triunghiul $ADF$ este isoscel.

***Constantinescu Marina***,
*Școala Gimnazială „Constantin Savoiu"*

10. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu baza pătratul $ABCD$, având unghiurile $AVB$ și $AVC$ ascuțite. Fie $AP\perp VB,\ P\in(VB)$ și $AQ\perp VC,\ Q\in(VC)$.
Dacă $PQ\cap BC=\{T\},$ să se arate că $PT=PQ$.

***Constantinescu Mircea,***
*CN„Ecaterina Teodoroiu"*

11. Se consideră piramda patrulateră regulată $VABCD$ cu baza $ABCD$. Fie $M$ mijlocul muchiei $[VB]$ și $N$ mijlocul muchiei $[VC]$. Să se arate că $AM$ și $BN$ nu pot fi perpendiculare.

***Constantinescu Mircea,***
*CN„Ecaterina Teodoroiu"*

12. Fie x, y, z $\in$ R pentru care $x^2+y^2+z^2=2(2x-3y+4z)-28$. Să se arate că : $0\leq x+y+z\leq 6$.

***Stoicoiu Simona***,
*Școala Gimnazială "Constantin Savoiu"*

13. Dreptunghiurile ABCD şi CDEF se află în plane perpendiculare. Dacă AB = 20 cm, BC = $\frac{25\sqrt{39}}{13}$ cm şi CF = 15 cm, să se determine măsura unghiului format de planele (FEB) şi (EBC).

***Stoicoiu Simona***,
*Şcoala Gimnazială "Constantin Savoiu"*

14. Să se arate ca $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1998}>\sqrt{3,9900}$

***Popescu Adrian C-tin***,
*Şcoala Gimnazială „Sf. Nicolae"*

15. Dacă a,b şi c sunt trei numere reale pozitive demonstrati ca E$\geq \frac{3}{2}$ unde

$$E=\frac{a+2b}{2a+3b+c}+\frac{b+2c}{a+2b+3c}+\frac{c+2a}{3a+b+2c}$$

***Popescu Adrian C-tin***,
*Şcoala Gimnazială „Sf. Nicolae"*

16. Aratati ca $4m^2+4n^2+4$ se poate scrie ca suma de patru patrate perfecte de numere naturale nenule , unde m si n sunt natural neconsecutive.

***Giorgi Victoria***,
*Şcoala Gimnazială "Sf. Nicolae"*

17. Sa se demonstreze ca $2\sqrt{a^2+1}\leq a^2+2; a\in\mathbb{R}$

***Velcea Emilia***,
*Liceul Teoretic"Mircea Eliade" , Lupeni*

18. Fie ABC un triunghi dreptunghic in A cu $BC=4a\sqrt{2}$ si masura unghiului dintre inaltimea si mediana corespunzatoare ipotenuzei egala cu $60^\circ$. In varful A al triunghiului se ridica perpendiculara AV pe planul triunghiului, $AV=a\sqrt{2}$. Aflati:
a) Distanta de la V la BC

b) Masura unghiului plan corespunzator diedrului format de planele (VBC) si (ABC)
c) Distanta de la punctul A la planul VBC
d) Volumul piramidei AVBC.

***Velcea Emilia***,
*Liceul Teoretic "Mircea Eliade" , Lupeni*

# SUMAR

Legenda paharului lui Pitagora ..... 3

Aspecte Metodice ..... 5

Concursul Interjudeţean „Discipolii Lui Pitagora” - Ediţia A Xiv-A, Drobeta Turnu Severin, 2018 ..... 15

Probleme Propuse..... 18